

## 軸・軸受および歯車の変形による歯車の等価組付誤差

小出 隆夫  
鳥取大学工学部機械工学科

### Equivalent Misalignment of Gears Due to Deformation of Shafts, Bearings and Gears

Takao KOIDE  
Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering  
Tottori University, Tottori, 680-8552 Japan  
E-mail: [koide@mech.tottori-u.ac.jp](mailto:koide@mech.tottori-u.ac.jp)

**Abstract:** This paper describes a model for calculating the equivalent misalignment of gears due to deformations of shafts, bearings and gears in gear box. This modeling consists of calculating the bending and torsional deformations of gear shaft considering the bearing stiffnesses (radial and moment stiffnesses) and gear body, and a method for calculating the equivalent misalignment of gears was obtained. The calculation program was developed using MS Visual Basic and the validity of the calculation program developed was examined by comparing the results of this program with those presented by United States, Germany and France to the ISO TC60 WG6. This program makes Japan catch up these countries in terms of usage of ISO 6336 standard for load carrying capacity of cylindrical involute gears in practice of international technical/industrial affairs.

**Key Words:** Gear, Shaft, Bearing, Bearing stiffness, Misalignment, Bending deformation, Torsional deformation

### 1. はじめに

筆者は、2006年2月に鳥取大学科学研究業績表彰を受けた。本稿は当該業績[1]の内容を紹介するものである。

歯車の歯に負荷が加わるとき、軸・軸受および歯車本体の変形等により歯面の空間的位置が変化し、歯面には組付誤差に相当する誤差（等価組付誤差  $F_{\beta x}$ ）が発生して歯すじ方向荷重分布が変化する。そのため、歯車の強度が大きく変わる。このような状況を考慮するため、当然ながら従来の歯車強度設計式[2]～[4]においても等価組付誤差は考慮されている。ところが、歯車装置の構造から等価組付誤差を推定する方法については、装置の個別対応になる可能性が高いため、規格計算式の形にまとめるのが困難であった。しかし、最近、たとえば、ISO式[5]ではこの考慮の重要性が認識され、設計式中に単純な等価組付誤差の推定法が導入されている。ところが、等価組付誤差は歯車装置の構造、使用する軸受の剛性などによって大きく変わるため、現ISO式中の単純な方法による推定では極めて不十分であることが一般的に認識されている。等価組付誤差の詳細な計算法はISO

式中には示されていないため、ISO式による強度的信頼性の推定結果に一般性が失われているのが実状である。このような背景のもとに、米、独、仏では、等価組付誤差の計算プログラムをそれぞれ独自に開発して、それをISO規格の一部として構成するよう位置づけ、商業ベースで販売しようとしている。ISO TC60 WG6委員会ではこれらのプログラムで計算された等価組付誤差の比較を行っているが[6]～[8]、それらの結果は大きく異なる場合もあり（図15, 16参照）、また各国の計算法の詳細も明らかにされていないため、ISO規格本体の評価にも影響を及ぼしている。さらに、このような等価組付誤差計算プログラムがなければISO規格の運用自体も困難になるため、我が国においてもより正確な等価組付誤差の計算プログラムの開発が急務となっている。これは本来、古典的な材料力学の問題のように思えるが、歯車装置の軸・軸受および歯車本体の変形の計算にはどのような構造のモデルを取り上げるべきかは不明であり、これが等価組付誤差の計算結果を左右しているようである。

本研究では、歯車の等価組付誤差の計算プログラムを開発するためのモデルを提案し、その妥当

性を検討する．すなわち，まず軸受剛性（ラジアル剛性，モーメント剛性）を考慮して，大，小歯車軸の曲げたわみ，ねじり変形を求める式を導く．つぎに，これらの式と軸受剛性，ガタ，および，歯車と軸の結合条件に基づいて，一段および二段歯車減速装置の等価組付誤差を求める計算式を導き，それらをプログラム化する．作成した計算プログラムにより，ISO TC60 WG6 資料中に示されている 3 種類の歯車減速装置に対して等価組付誤差の計算を行い，米，独，仏各国の計算結果との比較検討を行って，本モデルと計算プログラムの妥当性を確かめる．さらに，これらの等価組付誤差が歯車の接触・歯元応力に及ぼす影響について，ISO 規格強度計算式（ISO 6336）に基づいて検討を加える．

## 2. 等価組付誤差 $F_{\beta x}$ の計算

一段および二段歯車減速装置の等価組付誤差を計算するために，まず歯車減速装置を各歯車・軸の組合わせに分解し，各歯車・軸に対して，軸受の剛性（ラジアル剛性，モーメント剛性）を考慮して，段付き軸（三段および五段）の曲げたわみおよび軸受荷重，軸受変位を求める計算式を導いた．図 1 は，正面歯面法線荷重  $F_{bt}$  およびスラスト  $F_a$  による三段段付き軸の曲げたわみ計算モデルを示す．ここで， $F_n$ ：歯直角歯面法線荷重， $F_{bt}$ ：正面歯面法線荷重， $F_a$ ：スラスト， $F_{wt}$ ：かみ合いピッチ円上における円周力， $I_1$ ， $I_2$ ：A，B 側の軸長さ， $d_{s1}$ ， $d_{s2}$ ：A，B 側の軸直径， $b$ ：歯幅， $I_1$ ， $I_2$ ：A，B 側軸の断面二次モーメント， $I_G$ ：歯車部断面二次モーメント， $d_{b1}$ ， $d_{w1}$ ：歯車基礎円直径，かみ合いピッチ円直径， $\beta_b$ ：基礎円筒上ねじれ角， $\alpha_{wt}$ ：正面かみ合い圧力角， $R_A$ ， $R_B$ ： $F_{bt}$  による軸受荷重， $R'_A$ ， $R'_B$ ： $F_a$  による軸受荷重， $M_A$ ， $M_B$ ： $F_{bt}$  による軸受モーメント， $M'_A$ ， $M'_B$ ： $F_a$  による軸受モーメント， $k_A$ ， $k_B$ ， $k'_A$ ， $k'_B$ ：軸受ラジアル剛性， $k_{\theta A}$ ， $k_{\theta B}$ ， $k'_{\theta A}$ ， $k'_{\theta B}$ ：軸受モーメント剛性である．モーメント剛性は，図 1 中に示すように，軸受を単位角度回転させるのに必要なモーメントである．

歯車箱の剛性も，当然ながら等価組付誤差に大きな影響を与える．歯車箱剛性は，歯車箱図面より，たとえば FEA（有限要素法解析）などの構造解析により推定し，できるならばそれを実験により，より精度を上げて決定する必要がある．その詳細については本研究の範囲外であるためここには述べないが，そのようにして決定された歯車箱

剛性を軸受の剛性に加えることにより，軸受＋歯車箱という歯車軸支持剛性が得られる．ここに開発する等価組付誤差計算モデルならびに計算プログラムにおいては，これを広義の軸受剛性と考えることにより，等価組付誤差の推定にそのまま利用することが可能になる．

歯面荷重  $F_{bt}$ ， $F_a$  は全歯幅に等分布するとして，これらの荷重による曲げたわみ  $\delta_{y_{tb}}$ ， $\delta_a$  と  $F_{bt}$  によるねじれ変位  $\delta_{y_{tt}}$  を求める計算式を導いた．なお，軸のせん断変形は考慮していない．つぎに，軸受ガタによる歯すじ変位  $\delta_{y_l}$  および歯車と軸の結合条件を考慮した歯すじ変位  $\delta_{y_s}$  を求める計算式を導いた．

以上の計算式によって求めた各変位は，一段および二段歯車減速装置の歯車・軸の配置より計算した各歯車対の作用面上に変換し，各歯車の作用面上の歯すじ変位  $\delta_y$ ，各歯対の作用面上の相対歯すじ変位を求め，これらを用いて等価組付誤差  $F_{\beta x}$  を求めた．図 2 は，三段段付き軸の作用面上の歯すじ変位の計算例を示す．ここで， $\delta_{y_{tb}}$ ： $F_{bt}$  による曲げたわみ， $\delta_a$ ： $F_a$  による曲げたわみ， $\delta_{y_a}$ ： $\delta_a$  を作用面上に変換した値， $\delta_{y_{tt}}$ ：歯車のねじれ変位， $\delta_{y_l}$ ：軸受ガタによる歯すじ変位， $\delta_{y_s}$ ：歯車と軸の結合条件による歯すじ変位， $\delta_y$ ：作用面上の全歯すじ変位， $F_{\beta x2}$ ：歯すじ変位の最大値と最小値の差である． $\delta_y$  より相対歯すじ変位を求め，さらに等価組付誤差を計算することができる．

### 2.1 軸と歯車の曲げたわみの計算

図 1 に示すような，軸受によって支持されている三段段付き軸の変形を考える．歯車の等価直径としては，かみ合いピッチ円直径  $d_{w1}$  をとっている．垂直力  $F_{bt}$  による軸・軸受および歯車本体の曲げ変形は，軸受荷重  $R_A$ ， $R_B$  と  $F_{bt}$  との力のつりあい条件，A 点まわりのモーメントのつりあい条件， $x = l_1$ ， $l_1 + b$  における連続条件， $x = 0$ ， $l$  における境界条件から求めることができる．

スラスト  $F_a$  による軸・軸受および歯車本体の曲げ変形および他の段付き軸の場合においても同様に考えることができる．

### 2.2 歯車のねじれ変位の計算

歯車本体の歯幅方向の位置  $x$  における作用面上のねじれ変位  $\delta_{y_{tt}}$  は，有効歯元円直径  $d_e$  を等価直径とする円筒に対して求める．

### 2.3 軸受ガタによる歯すじ変位の計算

軸受ガタによる作用面上の軸・歯車の変位 $\delta_{yl}$ は、A, B 端における軸受ガタより求める。

### 2.4 歯車・軸結合条件による歯すじ変位の計算

歯車と軸の結合がスプライン、キーなどで行われている場合、一体構造の場合よりも結合剛性が低下し、これが歯面の変位に影響を及ぼすと考え

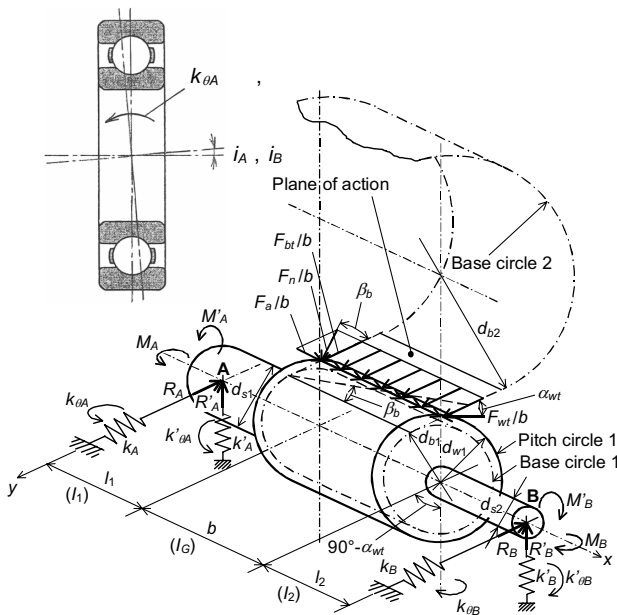


Fig.1 Calculation model of gear-shaft deflection due to applied load  $F_{bt}$  and  $F_a$

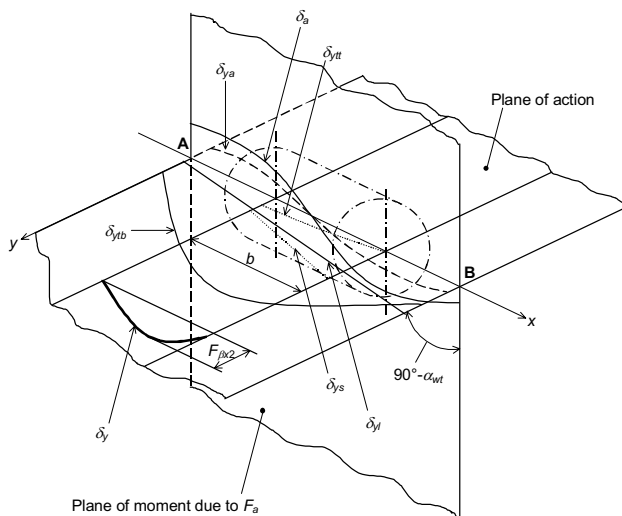


Fig.2 Deflection due to  $F_{bt}$  and  $F_a$

られる。図3は、歯車と軸の結合条件による歯すじ変位の計算モデルを示す。歯車と軸は剛体であると仮定し、歯車がハブ両端でそれぞれこわさ $k_{hA}$ ,  $k_{hB}$ のばねで支持されているとして、歯車・軸結合条件による作用面上の歯すじ変位 $\delta_{ys}$ を計算する。

### 2.5 歯車配列・トルクフロー

種々の歯車配列とトルクフローの場合に対し、等価組付誤差の計算を行う必要がある。一段および二段歯車減速装置を例にとると、後述の図7(a)に示すような6種類について扱うことになる。

### 2.6 歯車のねじれ方向と入力軸回転方向の組合わせによるスラスト方向の決定

曲げたわみの計算に用いるスラスト $F_a$ の方向は、各歯車のねじれ方向と入力軸回転方向の組合わせによって決める。

### 2.7 たわみ方向の変換

各たわみはすべて作用線方向の値に変換する。図4は、二段歯車減速装置のB側から見た歯車配

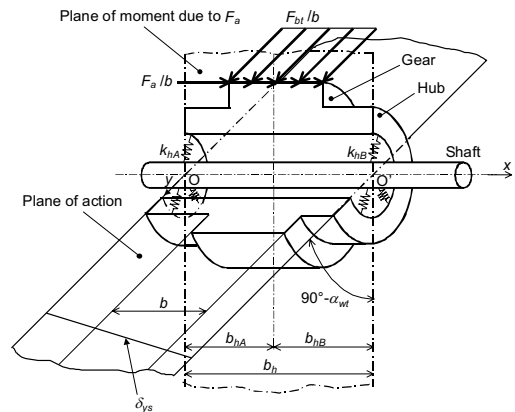


Fig.3 Calculation model for positioning deviation of lead  $\delta_{ys}$

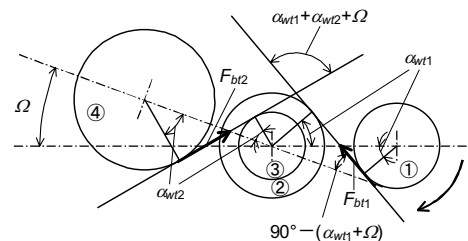


Fig.4 Gear arrangement (view from B side)

置を示す．軸に2つの歯車がついている場合，一方の歯車に負荷される垂直力およびスラストによるたわみをもう一方の歯車の作用線方向に変換する必要がある．軸1，2を含む平面と軸2，3を含む平面とのなす角を配置角度 $\Omega$ とし，これを考慮してたわみ方向の変換を行う．

## 2.8 等価組付誤差の出力

作用面上の各歯すじ変位より，図5に示すような4種類の等価組付誤差  $F_{\beta x1} \sim F_{\beta x4}$  を求める． $F_{\beta x1}$  は両歯幅端における歯すじ変位の差， $F_{\beta x2}$  は歯すじ変位の最大値と最小値の差， $F_{\beta x3}$  は  $F_{\beta x2}$  に1.33（放物線たわみを直線たわみに変換する場合に，ISO[5]で提案されている係数）を乗じた値， $F_{\beta x4}$  は歯すじ変位を最小二乗法によって直線近似したときの両歯幅端におけるたわみの差である．

## 3. 等価組付誤差の計算プログラム

### 3.1 計算フロー

2章で導いた計算式に基づく，相対歯すじ変位および等価組付誤差の計算プログラムを，Visual Basic によって作成した．図6は，作成した計算プログラムのフローチャートを示す．まず，設計者によって入力された歯車装置の図面情報より，一段あるいは二段歯車減速装置を各歯車・軸の組合せに分解し，歯車・軸の配置より，各歯車対の作用面方向および各歯車・軸の負荷，負荷位置を計算する．つぎに，各歯車・軸の曲げ，ねじり変形を計算する．作用面上の歯すじ変位を計算した後に，歯車と軸が一体でない場合は，歯車・軸結合条件による歯すじ変位を計算する．また一つの軸についている歯車の数が二つの場合には，もう一方の作用面上の歯すじ変位を計算する．すべての歯車・軸に対して作用面上の歯すじ変位の計算が終了した後，各歯車対の作用面上の相対歯すじ変位を計算する．変位が妥当であると設計者が判断した場合，等価組付誤差  $F_{\beta x}$ ，軸受荷重，変位を出力し，妥当でないと判断した場合は，歯車・軸結合条件，軸受剛性等のデータを入力し直し，歯すじ変位を再計算することができる．

### 3.2 ユーザーインターフェース

図7は，入力画面を示す．図7(a)では，入力軸回転方向，入力トルク，歯車配列とトルクフロ

ーを入力する．図7(b)では，各歯車の諸元を，図7(c)では軸受剛性，軸受ガタ，歯車箱剛性を，図7(d)では軸寸法を入力し，最後に図7(e)において歯車・軸結合条件と歯車軸の配置角度 $\Omega$ を入力したのち，”計算”をクリックすると計算が実行され，出力画面が表示される．

図8は，出力画面を示す．出力画面では，各歯車および歯車対の作用面上の相対歯すじ変位，4種類の等価組付誤差（図5）が表示される．また，各相対歯すじ変位の図をクリックすると歯幅方向の位置と変位が数値で表示される．

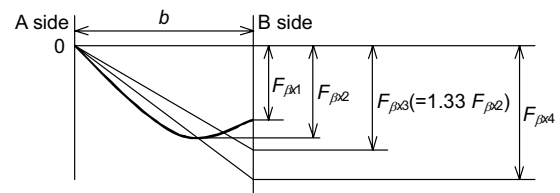


Fig.5 Definition of different kinds of equivalent misalignment  $F_{\beta x1} \sim F_{\beta x4}$

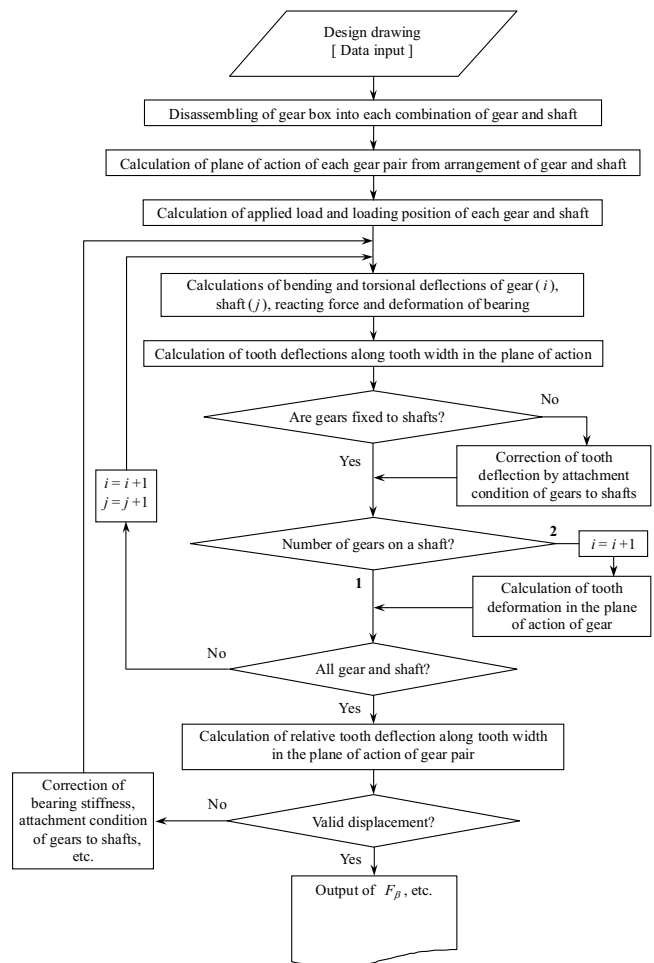


Fig.6 Flow chart for calculation of  $F_{\beta x}$

三段以上の歯車減速装置に対する等価組付誤差は、二段減速の場合の結果を組み合わせることにより求めることができる。

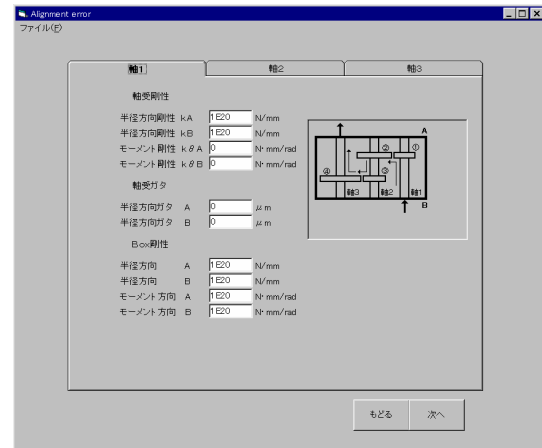
このように、本研究で開発したプログラムは、歯車装置の図面データさえあれば、とくに歯車についての専門的な知識がなくても、等価組付誤差を容易に計算することができるように構成した。

## 4. 計算結果および考察

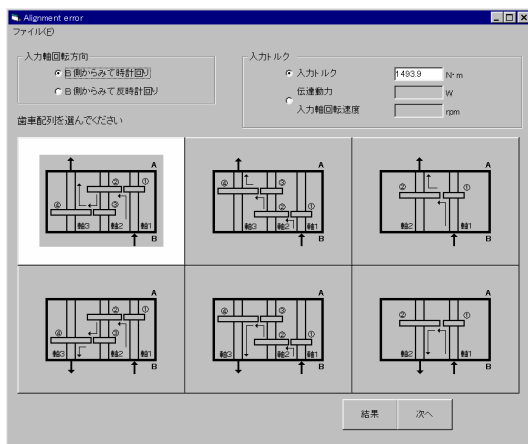
### 4.1 たわみ計算値の検証

図10は、図9に示す平滑軸に対して、本研究で作成した計算プログラムによるたわみ計算値と理論値を比較して示す。軸端支持部のモーメント剛性を0および $\infty$ とした場合のたわみ計算値は、それぞれ両端単純支持および両端固定支持はりの

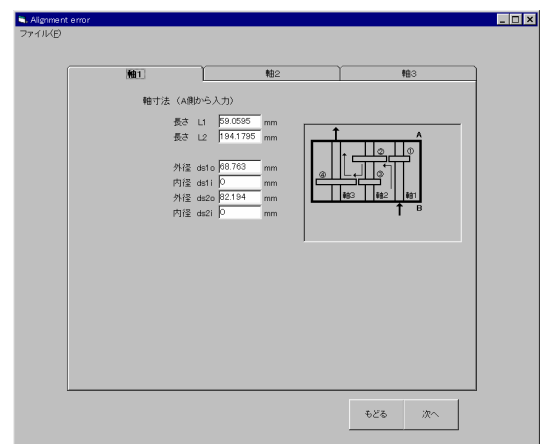
理論値とよく一致しており、今回作成したたわみ計算プログラムの妥当性の一端が示されていると考えられる。



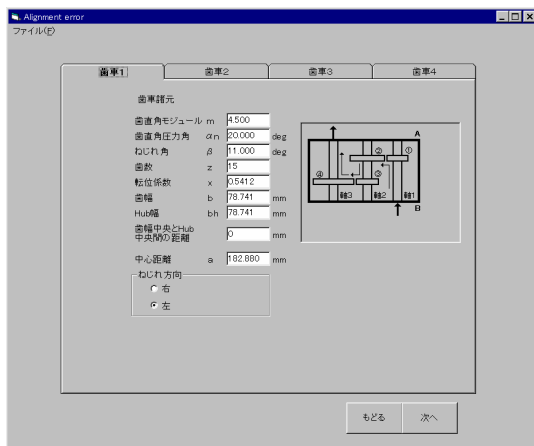
(c)



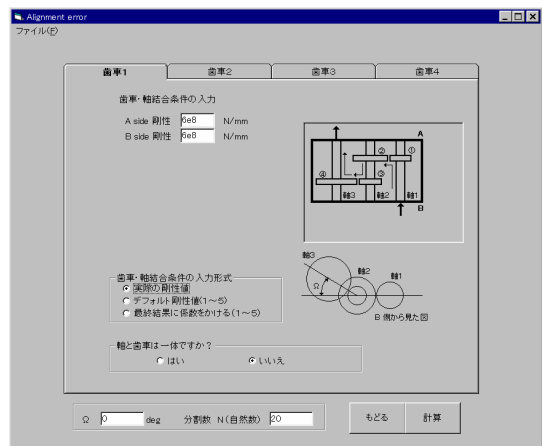
(a)



(d)



(b)



(e)

Fig.7 Example of input window for considering shafts arrangement and torque flow



## 4.2 各国で計算された相対歯すじ変位の比較

図11～13は、ISO TC60 WG6 委員会で等価組付誤差の検討の対象とされている歯車減速装置を示す。また、表1～6に歯車の諸元と軸寸法を示す。図14～16は、米、独、仏の各国で開発された計算プログラムによる相対歯すじ変位[6]～[8]と本研究で開発した計算プログラムによる結果を、横軸にA側歯幅端からの距離をとって示す。仏による結果は二段歯車減速装置に対するものしか示されていない。本研究による結果は、軸受のラジアル剛性は  $k_A = k_B = \infty$  と一定とし、モーメント剛性を  $k_{\theta A} = k_{\theta B} = 0, \infty$  としたものを示している。

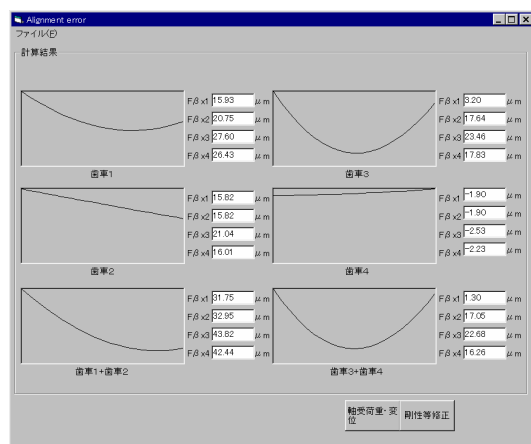


Fig.8 Example of output window

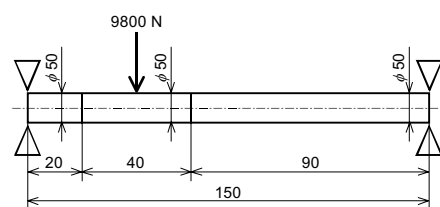


Fig.9 Sample model for examining the calculated deflection

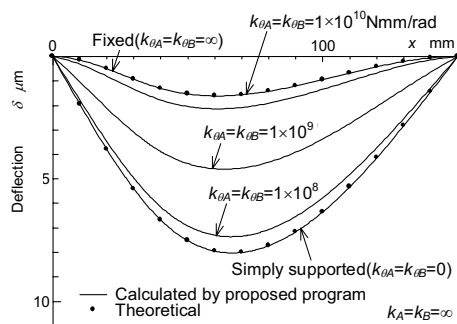


Fig.10 Comparison of program output with theoretical results

他国の計算方法の詳細は公式には明らかにされていないが、ISO TC60 WG6 の審議過程の話からは、おそらくこの条件に対応しているものと思われる。図14より、一段減速装置の場合には、米、独および本研究の相対歯すじ変位は、大きさ、傾向ともほぼ等しいことが認められる。図15より、二段減速装置の場合には、米、独の相対歯すじ変位ははかり近いが、仏の結果は少し異なること、および、本研究の相対歯すじ変位は、高速段の  $k_{\theta A} = k_{\theta B} = \infty$  の場合を除いて、各国の結果のばらつきの範囲にほぼ入っていることがわかる。図16より、三段減速装置の場合には、米、独の相対歯すじ

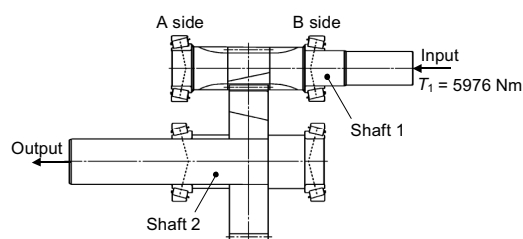


Fig.11 Sample of 1 stage gear reducer

Table 1 Dimensions of gears for 1 stage gear

	Pinion	Gear
Normal module	$m_n$	8.0
Normal pressure angle	$\alpha_n$	20°
Number of teeth	$z$	14 59
Helix angle	$\beta$	11°
Addendum modification coefficient	$x$	0.5317 0.4612
Face width	$b$	137mm 127mm
Center distance	$a$	304.8mm

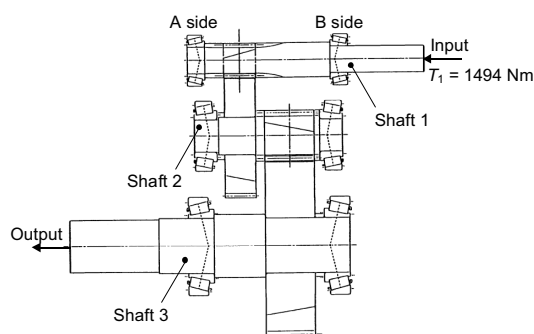


Fig.12 Sample of 2 stage gear reducer

Table 2 Dimensions of shafts for 1 stage gear

	Shaft 1	Shaft 2
$l_1$	135.54mm	132.93mm
$l_2$	135.54mm	132.93mm
$d_{s1}$	114.300mm	146.050mm
$d_{s2}$	114.300mm	171.45mm

変位の差が一段、二段減速の場合よりも大きくなっており、とくに中速段の場合には分布傾向が左右逆になっていること、および、本研究の相対歯すじ変位は、中速段を除いて米、独と同様の分布傾向を示すことが認められる。このように、各国および本研究の相対歯すじ変位は、減速装置の段

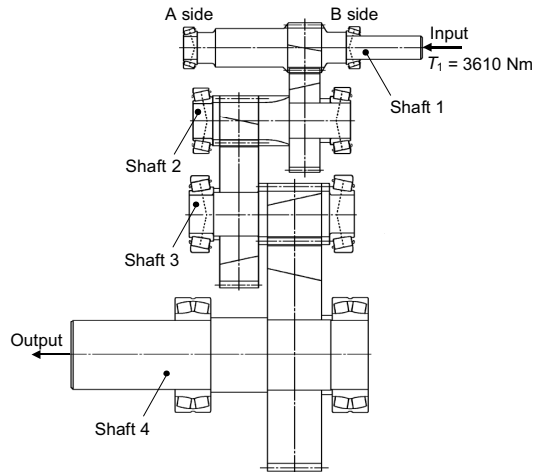


Fig.13 Sample of 3 stage gear reducer

Table 3 Dimensions of gears for 2 stage gear reducer

		High speed		Low speed	
		Pinion	Gear	Pinion	Gear
Normal module	$m_n$	4.5		6	
Normal pressure angle	$\alpha_n$	20°		20°	
Number of teeth	$z$	15	63	17	69
Helix angle	$\beta$	11°		11°	
Addendum modification coefficient	$x$	0.54	0.44	0.52	0.46
Face width	$b$	78.7mm	76.2mm	121mm	121mm
Center distance	$a$	182.890mm		266.700mm	

Table 4 Dimensions of shafts for 2 stage gear reducer

	Shaft 1	Shaft 2	Shaft 3
$l_1$	59.06mm	38.59mm	104.09mm
$l_2$	194.18mm	20.96mm	36.46mm
$l_3$	—	32.11mm	—
$d_{s1}$	68.76mm	88.90mm	152.40mm
$d_{s2}$	82.19mm	103.91mm	133.35mm
$d_{s3}$	—	103.91mm	—

Table 5 Dimensions of gears for 3 stage gear reducer

		High speed		Intermediate speed		Low speed	
		Pinion	Gear	Pinion	Gear	Pinion	Gear
Normal module	$m_n$	7		9		11	
Normal pressure angle	$\alpha_n$	20°		20°		20°	
Number of teeth	$z$	20	44	15	50	15	63
Helix angle	$\beta$	11°		12°		12°	
Addendum modification coefficient	$x$	0.5749	0.7037	0.4086	0.2740	0.6940	1.2271
Face width	$b$	112mm	102mm	127mm	127mm	178mm	178mm
Center distance	$a$	236.220mm		304.800mm		457.200mm	

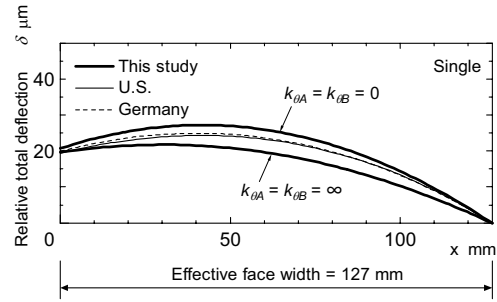
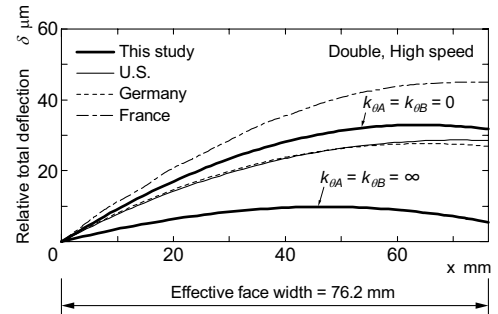
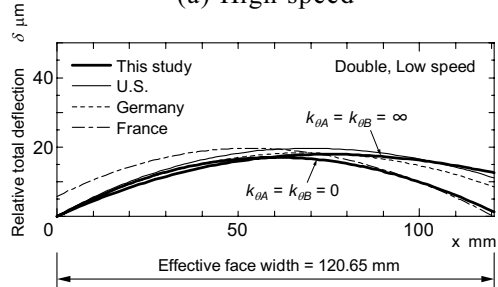


Fig.14 Comparison of results for relative total deflection between meshing tooth flanks reported by different countries (1 stage gear reducer)



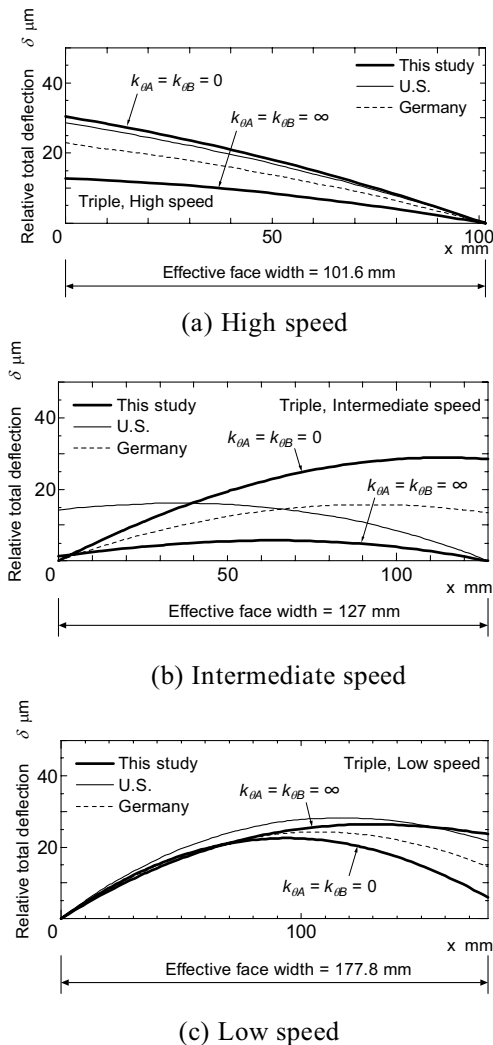
(a) High speed



(b) Low speed

Fig.15 Comparison of results for relative total deflection between meshing tooth flanks reported by different countries (2 stage gear reducer)

数が増えるとその差が増大する傾向にあり，等価組付誤差を算出するための構造モデル構築の難しさが認められるとともに，未だこの取り扱いについては未解決であることがわかる．このような問題点はあるものの，本研究で開発した計算法は，各国の計算法の結果と概ね一致しており，ISO 6336 規格運用の一環として十分実用可能であると考えられる．なお，相対歯すじ変位は軸受剛性によって大きく変わるので，等価組付誤差の計算には，軸受剛性を考慮する必要があるが，具体的なこの数値データの現状はその信頼性に欠け，歯車の等価組付誤差を必要な精度で求めるには不十分であり，信頼性のある計算法の開発あるいは開示が求められる．

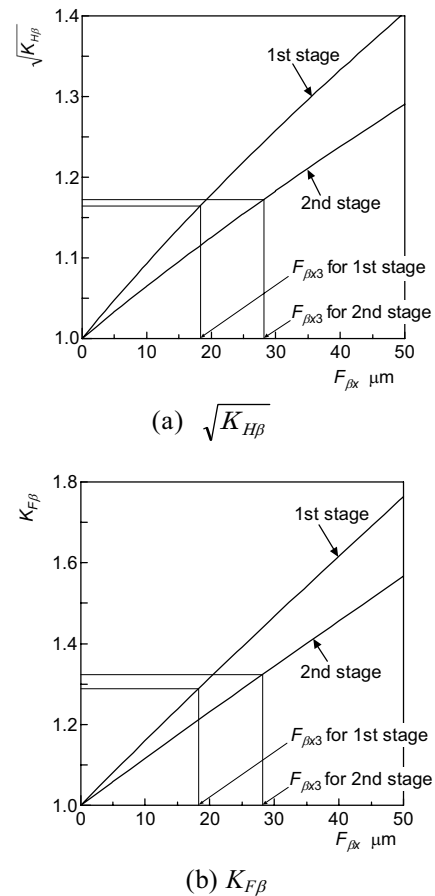


**Fig.16** Comparison of results for relative total deflection between meshing tooth flanks reported by different countries (3 stage gear reducer)

#### 4.3 接触・歯元応力に及ぼす等価組付誤差の影響

等価組付誤差  $F_{\beta x}$  による，接触，歯元応力の変化を ISO 式[5]について調べた．ISO 式では， $F_{\beta x}$  を用いて計算される歯すじ荷重分布係数  $K_{H\beta}$ ， $K_{F\beta}$  によって  $F_{\beta x}$  が各応力に及ぼす影響を考慮するようになっており，接触応力に対しては  $\sqrt{K_{H\beta}}$  を，歯元応力に対しては  $K_{F\beta}$  を乗じることによって等価組付誤差のある場合の接触，歯元応力を求めるようになっている．

図 17 は， $F_{\beta x}$  の値を種々変えた場合の ISO 式による  $\sqrt{K_{H\beta}}$ ， $K_{F\beta}$  の計算結果を示す．図中の  $F_{\beta x3}$  は，実際に用いられている歯車装置おける値を示す．図より，いずれの計算式においても，接触応力 ( $\sqrt{K_{H\beta}}$ )，歯元応力 ( $K_{F\beta}$ ) は， $F_{\beta x3}$  の増加につれてかなり増大すること，実際に使用されている負荷条件においても接触・歯元応力は，等価組付誤差を考慮しない場合よりも 10～30%程度も増大する可能性があることがわかる．このように等価



**Fig.17** Effect of  $F_{\beta x}$  on  $\sqrt{K_{H\beta}}$  and  $K_{F\beta}$  calculated by ISO formula



組付誤差は、接触・歯元応力に大きく影響を及ぼすので、歯車強度設計には等価組付誤差を考慮する必要があるものと考えられる。

## 5. おわりに

歯車の強度的信頼性に極めて大きな影響を与える等価組付誤差を、歯車装置図面より推定する際のモデリングを提案し、とくに歯車についての専門知識がなくても、等価組付誤差を容易に求めることができる計算プログラムを作成した。

ISO 6336 歯車強度計算式規格運用のための道具として、米、独、仏で開発された等価組付誤差計算プログラムによる結果と本研究により開発したプログラムの結果との比較検討を行い、本研究で開発した計算プログラムが十分実用可能であることを確かめ、ISO 6336 規格運用について日本の出遅れを取り戻すことができた。

本研究は、日本機械学会 RC156 コンペティティブ歯車装置のための最新設計製造技術調査研究分科会の調査・研究活動の一環として行ったもので

あり、ISO 資料の入手、評価、RC156 運営委員会社のプログラム等による評価、検討に関し、同分科会の協力を得た。関係各位に謝意を表す。本研究を行うにあたり、熱心に協力された鳥取大学技術専門職員・難波千秋氏に対し、厚くお礼申し上げる。

## 参考文献

- [1] 小出隆夫・小田哲・松浦昇吾・久保愛三：軸・軸受および歯車の変形による歯車の等価組付誤差（計算モデルの提案とプログラム開発）、日本機械学会論文集，67-659，C(2001)，pp. 2329-2336.
- [2] 日本機械学会，歯車強さ設計資料，(1979)，6.
- [3] JGMA402-02，(1974).
- [4] AGMA218.01，(1982).
- [5] ISO6336，(1995).
- [6] ISO/TC60/SC2/WG6/AH3，Doc N7，(1999).
- [7] ISO/TC60/SC2/WG6/AH3，Doc N14，(1999).
- [8] ISO/TC60/SC2/WG6，Doc N761，(1999).

(受理 平成 18 年 11 月 24 日)